Stochastik II

Binomialverteilung

by Lindas Lernzettel

Bernoulli-Experiment

Zufallsexperiment, bei dem nur zwei Ergebnisse möglich sind (e & ē)

- Wahrscheinlichkeit ändert sich nicht
- Trefferwahrscheinlichkeit: p , kein Treffer: 1-p
- wird Bernoulli Experiment n-mal unabhängig voneinander durchgeführt
  → Bernoulli-Kette der Länge n

Bernoulli Formel: die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Durchführungen genau k mal das Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit p eintritt ist:

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt Binomialverteilung und X ist $B_{n;p}$ -verteilt

Die kumulierte Wahrscheinlichkeit

Die kumulierte Wahrscheinlichkeit einer $B_{n;p}$ -verteilten Zufallsvariablen X ist gegeben durch:

$$\boxed{P(X \le k) = P(X=0) + P(X=1) + .. P(X=k)}$$

! Typische Fragestellungen

- genau k Treffer: $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
- höchstens k Treffer: $P(X \le k)$
- weniger als k Treffer: $P(X < k)$; $P(X \le k-1)$
- mindestens k Treffer: $P(X \ge k) = 1 - P(X \le k-1)$
- mehr als k Treffer: $P(X > k) = P(X \ge k+1) = 1 - P(X \le k)$
- mindestens k Treffer, aber höchstens h Treffer: $P(k \le X \le h) = P(X \le h) - P(X \le k-1)$

Die Sigma-Regeln

Mithilfe der Standardabweichung lässt sich die Wahrscheinlichkeit abschätzen, mit der die Trefferanzahl innerhalb einer sogenannten σ-Umgebung um den Erwartungswert liegt

!

$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) \approx 68{,}3\,\%$

$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 95{,}4\,\%$

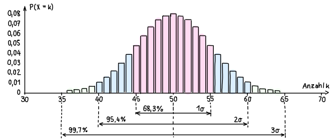
$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\,\%$

$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 90\,\%$

$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 95\,\%$

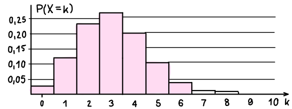
$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 99\,\%$

Mit Sicherheit 68,3% liegt die Anzahl der Treffer in dem Intervall



μ - σ → aufrunden
μ + σ → abgerundet

Histogramme deuten



n = 10 ; p = 0,3   E(X) = n · p = 3

→ mit wachsendem n (gleichbleibenden WHK) wird der Graph immer breiter und flacher
→ σ Sigma ist ein Maß für die Breite der Verteilung
→ p gegen 1, p gegen 0 —> Graph wird schmaler und höher

Erwartungswert und Standardabweichung

X sei eine $B_{n;p}$-verteilte Zufallsvgröße, dann gilt:

Erwartungswert: $E(X) = \mu = n \cdot p$

Varianz: $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

σ >3, dann ist, dann kann die Verteilung von X gut durch eine Normalverteilung angenähert werden. Der Erwartungswert μ ist dann die Extremstelle (HP) und σ entspricht dem Abstand zwischen Extremstelle und Wendestelle

→ Eine Binomialverteilung ist näherungsweise normalverteilt für σ>3

→ Die Glockenkurve ist die graphische Darstellung einer Normalverteilung